

Actions mécaniques

Statique

1/ Modélisation des actions mécaniques

Définition d'un système matériel: Un système matériel est constitué d'un ensemble de solides ou fluides affectés d'une masse.

1-1/ Notion d'action mécanique (AM)

Une AM est une grandeur physique qui tend à déplacer un système matériel dans un référentiel donné, ou à le maintenir au repos, ou à le déformer.

1-2/ Notion de force

On appelle **force** l'action mécanique s'exerçant mutuellement entre deux particules, en contact ou à distance.

Une force se caractérise par :

- Son intensité (unité le Newton (N))
- Sa direction
- Son sens
- Son point d'application

Elle est modélisable par un **vecteur lié** (un vecteur attaché à un point), de norme l'intensité de la force, de même direction, de même sens, et de base le point d'application de la force

On appelle **support de la force** l'axe défini par :

- Le point d'application de la force
- La direction de la force

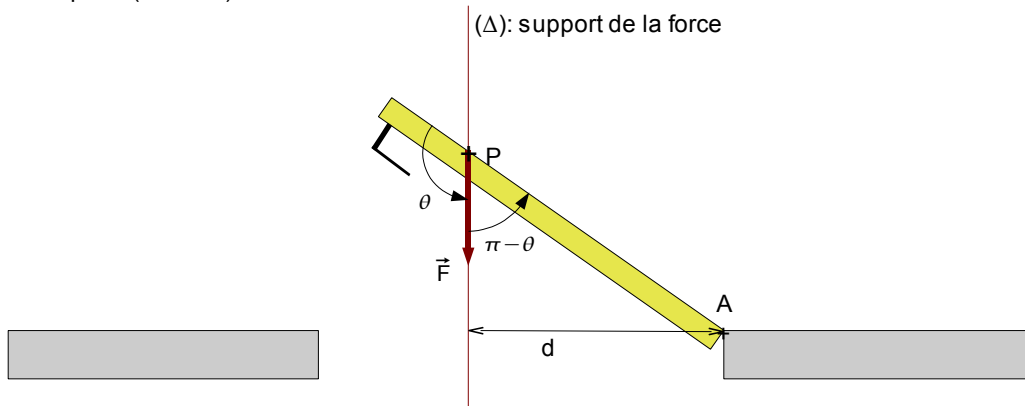
1-3/ Notion de moment

On appelle **Moment** en A, d'une force \vec{F} de point d'application P sur un solide S, la grandeur suivante:

$$\vec{M}(A, \vec{F} \rightarrow S) = \vec{AP} \wedge \vec{F}$$

Ce vecteur moment traduit la capacité de la force \vec{F} à entraîner en rotation un solide autour du point A (ou à lui imposer une torsion suivant le même axe)

Exemple de la porte (solide S):



$$\begin{aligned} \|\vec{M}(A, \vec{F} \rightarrow S)\| &= \|\vec{F}\| \|\vec{AP}\| \sin \theta \\ &= \|\vec{F}\| \|\vec{AP}\| \sin(\pi - \theta) \\ &= \|\vec{F}\| d \end{aligned}$$

Donc le Moment en A de la force \vec{F} a pour intensité le produit de l'intensité $\|\vec{F}\|$ par la distance de A au support (Δ) de \vec{F} .

Cette distance **d est le bras de levier** de la force \vec{F} par rapport au point A. L'unité d'un moment est le Newton Mètre (Nm).

1-4/ Torseur des actions mécaniques

Problématique: Connaissant le moment en un point A d'une force \vec{F} s'appliquant sur un solide (S), comment trouver le moment de cette même force, en un point B quelconque?

$$\begin{aligned} \vec{M}(A, \vec{F} \rightarrow S) &= \vec{AP} \wedge \vec{F} \\ \vec{M}(B, \vec{F} \rightarrow S) &= \vec{BP} \wedge \vec{F} = \vec{BA} \wedge \vec{F} + \vec{AP} \wedge \vec{F} \\ \vec{M}(B, \vec{F} \rightarrow S) &= \vec{M}(A, \vec{F} \rightarrow S) + \vec{F} \wedge \vec{AB} \end{aligned}$$

On retrouve un champ vectoriel pouvant être décrit par un **torseur**...

Cas d'un solide soumis à plusieurs forces \vec{F}_i

$$\begin{aligned} \vec{M}(A, \Sigma \vec{F}_i \rightarrow S) &= \Sigma \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i \\ \vec{M}(B, \Sigma \vec{F}_i \rightarrow S) &= \Sigma \vec{BP}_i \wedge \vec{F}_i = \Sigma \vec{BA} \wedge \vec{F}_i + \Sigma \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i \\ \vec{M}(B, \Sigma \vec{F}_i \rightarrow S) &= \vec{M}(A, \Sigma \vec{F}_i \rightarrow S) + \Sigma \vec{F}_i \wedge \vec{AB} \end{aligned}$$

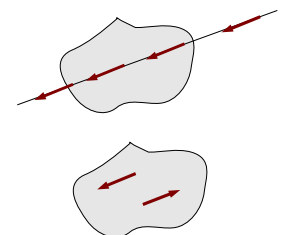
La relation torsorielle est toujours respectée (on a vérifié la propriété d'additivité)

Nous modéliserons donc les actions mécaniques agissant sur un système matériel S par un **torseur des actions mécaniques** (appelé aussi **torseur statique**) tel que:

$$\{T(\vec{S} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Résultante} = \Sigma \vec{F}_i(\vec{S} \rightarrow S) = \vec{R} \\ \text{Moment} = \Sigma \vec{M}(A, \vec{F}_i \rightarrow S) = \Sigma \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i(\vec{S} \rightarrow S) \end{array} \right\}$$

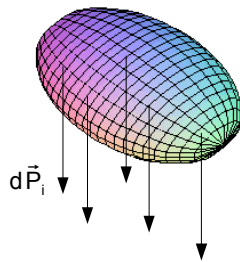
Cas particuliers:

- Si le moment est nul en A, on dit que le torseur est un **glisseur**. Interprétation mécanique: la modélisation d'une **force** par un torseur est un glisseur. C'est-à-dire que **ses composantes ne changent pas tout le long du support de la force**
- Si la **résultante est nulle**, on dit que le torseur est un torseur **couple**: On peut modéliser l'action mécanique en tout point du système matériel par un moment constant.



1-5/ Actions mécaniques à distance

Nous n'étudierons que l'action mécanique de pesanteur. Celle-ci agit à distance sur chaque particule du système matériel.



Soit ρ la masse volumique en kg.m^{-3}
 En chaque point P, le volume élémentaire a une masse $dm = \rho \cdot dv$
 Chaque élément de volume dv est soumis à un poids $d\vec{P}_i = dm \cdot \vec{g} = \rho \cdot dv \cdot \vec{g}$

La résultante s'écrit $\vec{P} = \sum \vec{P}_i = \sum m_i \vec{g}$ ($= \int dm \vec{g}$ cas d'une répartition continue des masses)
 soit $\vec{P} = M \vec{g}$

On modélise l'action de la pesanteur par un vecteur lié d'intensité $M \cdot g$, de direction verticale, dirigé vers le centre de la Terre, et de point d'application le barycentre des masses du système matériel.

Définition: G, le centre d'inertie, est le barycentre des masses d'un système matériel (E) si:

- Dans le cas d'une répartition discrète des masses du système matériel (répartition discrète: il existe un nombre fini de masses assimilables à des points. ex: le système solaire...):

$$\forall A, \vec{AG} = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \vec{AG}_i \quad (M = \sum m_i)$$

- Dans le cas d'une répartition continue des masses du système matériel (répartition continue: le système matériel étudié est assimilable à une infinité d'éléments de masses infiniment petits) :

$$\forall A, \vec{AG} = \frac{1}{M} \int \vec{AP} \cdot dm \quad (\text{avec } M = \int dm)$$

Propriétés:

$$\int_{(P \in E)} \vec{GP} \, dm = \int \vec{GA} \, dm + \int \vec{AP} \, dm$$

$$\int_{(P \in E)} \vec{GP} \, dm = -M \cdot \vec{AG} + M \cdot \vec{AG}$$

$$\int_{(P \in E)} \vec{GP} \, dm = \vec{0}$$

Moment du poids en G:

$$\int_{(P \in E)} d\vec{M}(G, d\vec{P}) = \int \vec{GP} \wedge dm \vec{g}$$

$$= \int \vec{GP} \, dm \wedge \vec{g}$$

$$= \vec{0}$$

L'action de la pesanteur sur un système matériel (E) se représentera donc par un glisseur tel que:

$$\{T(\text{pesanteur} \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Résultante} = M \vec{g} \\ \text{Moment}(G, \vec{P} \rightarrow S) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

Méthode de détermination du centre d'inertie: Cf annexe 1

Remarque préliminaire: on confondra volontairement le centre d'inertie d'un système et son centre de gravité. En effet, le centre d'inertie est le barycentre des volumes élémentaires d'un système matériel pondérés par les masses élémentaires, alors que le centre de gravité est le barycentre des volumes élémentaires pondérés par les poids élémentaires...

Ces deux centres (inertie et gravité) ne diffèrent que si la gravité varie sensiblement au sein du système matériel étudié...

Méthode de détermination du centre d'inertie:

1/ Le système matériel dispose-t-il d'éléments de symétrie matérielle?

OUI: préciser ces éléments géométriques, ainsi que l'élément géométrique sur lequel se trouve G

2/ Le solide est-il homogène (même masse volumique en chaque point)?

NON: cf définition de G par l'intégrale

3/ Le système peut-il être décomposé en plusieurs éléments dont les centres d'inertie G sont connus?

OUI: cf définition discrète du centre de gravité

NON: cf définition continue du centre de gravité

1-6/ Actions mécaniques transmissibles par une liaison (cf annexe 2)

Le tableau que nous allons étudier précise la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles entre deux solides en fonction de la liaison normalisée. Ce torseur s'appelle le torseur statique, ou le torseur d'inter-efforts, ou le torseur des AM transmissibles.

Hypothèse: liaisons parfaites

Tableau annexe à compléter

1-7/ Recherche de liaison équivalente grâce au torseur statique

- **Liaisons en parallèle:** il suffit d'additionner les torseurs statiques des différentes liaisons afin d'identifier la liaison équivalente à ces liaisons en parallèle
- **Liaisons en série:** il faut faire l'égalité des torseurs statiques successifs (ramenés au même point). La résolution (généralement partielle) du système obtenu conduit à l'identification de la liaison équivalente aux liaisons en série.

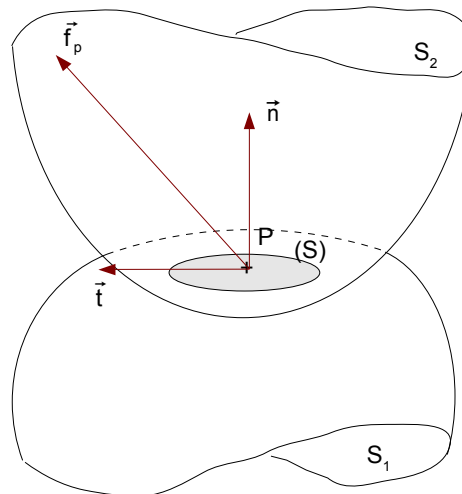
Pour plus de précisions, se référer au cours (à part), sur la synthèse des méthodes de recherche de liaisons équivalentes.

1-8/ Actions mécaniques de contact

1-8-1/ Modélisation locale

Un modèle d'action mécanique est dit local s'il permet d'étudier un contact à l'échelle d'une zone infiniment petite autour d'un point géométrique.

Considérons deux corps (S_1) et (S_2) en contact suivant une surface (S).



Soient $\left\{ \begin{array}{l} \text{Un point } P \in (S) \\ \vec{n} \text{ vecteur unitaire normal à la surface de contact} \\ \vec{t} \text{ vecteur unitaire } \in \text{ plan tangent à la surface de contact} \end{array} \right.$

Si le **contact est surfacique**, l'action mécanique de (S_1) sur (S_2) se caractérise, en chaque point P de la surface de contact (S), par une **densité surfacique de forces** $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ (homogène à une force divisée par une surface, c'est-à-dire des Pascal, c'est-à-dire des **N.m⁻²**).

Si le **contact est linéique**, l'action mécanique se caractérise par une **densité linéique de force** (homogène à des **N/m**).

1-8-2/ Modélisation globale

La modélisation globale est l'étude d'une force équivalente à la somme des éléments de forces étudiés localement.

Pour une densité surfacique de forces, le torseur des actions mécaniques de S_1 sur S_2 s'écrit:

$$\{T(S_1 \rightarrow S_2)\}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{(P \in S)} \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2) dS \\ \vec{M}(A, S_1 \rightarrow S_2) = \int_{(P \in S)} \vec{AP} \wedge \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2) dS \end{array} \right. \}$$



La connaissance du modèle local entraîne la connaissance du modèle global. L'inverse n'est pas vrai.

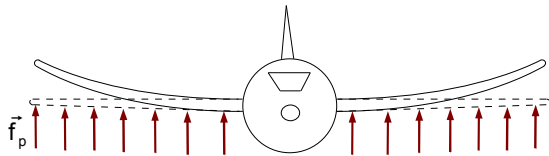
1-8-3/ Choix d'une modélisation locale ou globale

Exemple: étude d'une aile d'avion

On modélise l'action mécanique qui maintient un avion en l'air (la portance) par une action mécanique de contact entre l'air (fluide) et les ailes de l'avion.

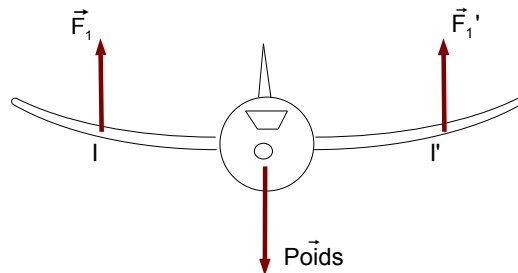
Nous distinguerons deux modèles d'études, qui n'amènent pas aux mêmes résultats:

**On veut étudier la déformation de l'aile:
Modélisation locale**



La connaissance de la répartition surfacique de l'action de l'air sur l'aile permet d'accéder à des grandeurs telles la déformée de l'aile, ou encore la contrainte au niveau des matériaux

**On veut vérifier si, globalement, cette action est suffisante pour maintenir l'avion en l'air...
Modélisation globale**



Avec ce modèle, on peut étudier les mouvements de l'avion sous un aspect dynamique

\vec{F}_1 est la résultante de la densité surfacique de force \vec{f}_p sur l'aile. Les points I et I' sont les **centres de poussée** de l'action de l'air sur chaque aile.

Le centre de poussée d'un système S_2 sur un système S_1 est le point I tel que:

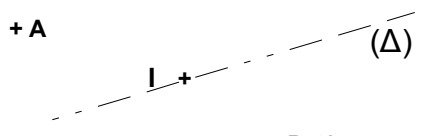
$$\text{Résultante} \wedge \text{Moment} (I, S_2 \rightarrow S_1) = \vec{0}$$

Le centre de poussée est sur l'axe central du torseur d'actions mécanique.

Pour trouver le centre de poussée, on peut utiliser la formule suivante:

$$\forall A, \vec{R} \text{ étant la résultante, on a } \vec{AI} = \frac{(\vec{R} \wedge \vec{M}(A))}{(\|\vec{R}\|^2)}$$

Démo: Soit un solide (S) soumis à un ensemble d'actions mécaniques modélisées par un torseur dont l'axe central est noté (Δ) . Soit un point $I \in (\Delta)$. Soit un point A quelconque.



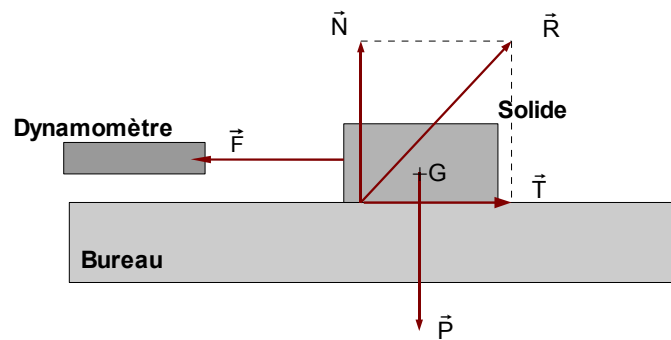
$$\begin{aligned} \vec{R} \wedge \vec{M}(I, \vec{F} \rightarrow S) &= \vec{0} \\ \vec{R} \wedge (\vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AI}) &= \vec{0} \\ \vec{R} \wedge \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{AI}) &= \vec{0} \\ \vec{R} \wedge \vec{M}(A) + (\vec{R} \cdot \vec{AI}) \cdot \vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{AI} &= \vec{0} \\ \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{M}(A)) + \vec{R} \wedge (\vec{R} \cdot \vec{AI}) \cdot \vec{R} - \vec{R} \wedge (\vec{R} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{AI} &= \vec{0} \\ \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{M}(A)) - (\vec{R} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{AI} &= \vec{0} \end{aligned}$$

- Ppté axe central*
- Varignon*
- Distribution*
- Ppté pdt mixte*
- $\vec{R} \wedge$ égalité précédente
- nullité du pdt vectoriel de vecteurs colinéaires*

Cette égalité doit être vraie pour tout point A, quelles que soient les valeurs de \vec{R} , ainsi que la position de I sur (Δ) . Il faut donc vérifier que:

$$\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{M}(A)) - (\vec{R} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{AI} = \vec{0}$$

Ce qui est vrai ssi: $\vec{AI} = \frac{(\vec{R} \wedge \vec{M}(A))}{(\|\vec{R}\|^2)}$ cqfd

1-9/ Etude du phénomène de frottement**Expérience:**

Si je tire sur le dynamomètre, quelles sont les actions mécaniques agissant sur le chariot?

- A distance: le Poids
- De contact: - L'action du dynamomètre
- L'action du bureau

En physique, vous avez vu que $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$

Si le chariot est immobile ou en translation rectiligne, $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -\vec{F}$, $\vec{N} = -\vec{P}$

Tableau des observations:

On observe que:

1/ Pour un couple de matériaux donné, le rapport $\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$ reste \leq à une valeur maxi obtenue à la limite du glissement

2/ A la limite du glissement et pendant le glissement, le rapport $\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$ est indépendant de l'intensité de l'action mécanique de contact entre les deux surfaces frottantes

3/ Le rapport $\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$ diminue pour un couple de matériaux donné, si la surface de contact est lubrifiée

4/ Le sens de l'action mécanique du bureau sur le solide s'oppose à la vitesse du solide / bureau

1-9-1/ Modélisation du phénomène de frottement: lois de Coulomb en modélisation locale

Pourquoi modéliser le phénomène de frottement??

Parce que celui-ci est primordial dans de nombreuses applications, et on va souvent chercher à l'optimiser (maximiser ou minimiser son effet).

Par exemple

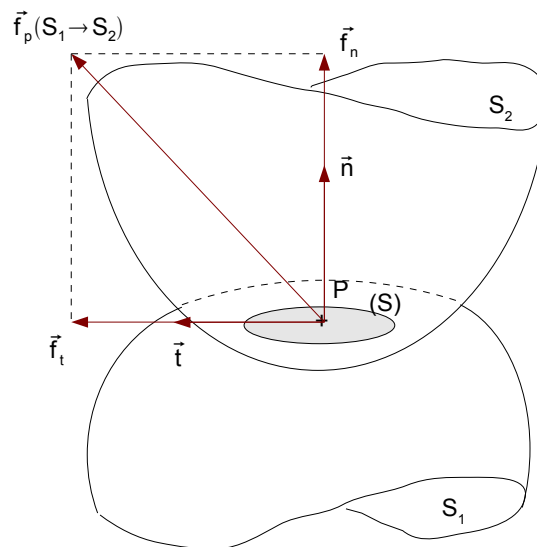
on veut le maximiser dans le cas:

- Du contact d'un pneu sur le sol
- Dans les systèmes de freinage
-

on veut le minimiser dans le cas:

- d'un guidage d'un arbre en rotation par contact direct
- contact d'un ski sur la neige
- ...

Rappel du paramétrage du contact:



- Dans le cas du contact sans frottement, $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ n'a de composante que sur \vec{n}
- Dans le cas du contact avec frottement, $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ a une composante suivant \vec{n} et une suivant \vec{t}

a/ Si glissement entre (S₁) et (S₂) $\Leftrightarrow \vec{V}(P, S_2/S_1) \neq \vec{0}$

Lorsqu'il y a glissement en P entre S₁ et S₂, la composante tangentielle de la densité surfacique des forces de contact de S₁→S₂ (notée \vec{f}_t) est opposée à la vitesse de glissement de S₂/S₁.

Traduction mathématique:

- $\vec{f}_t(S_1 \rightarrow S_2) \wedge \vec{V}(P, S_2/S_1) = \vec{0}$ (même direction des vecteurs)
- $\vec{f}_t(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(P, S_2/S_1) < 0$ (sens opposés)

Activité: compléter le schéma précédent en dessinant $\vec{V}(P, S_2/S_1)$

D'autre part, les composantes tangentielle et normale au plan de contact sont proportionnelles en intensité:

$$\|\vec{f}_t(S_1 \rightarrow S_2)\| = f \cdot \|\vec{f}_n(S_1 \rightarrow S_2)\|$$

f est le coefficient de frottement intrinsèque au couple de matériaux en contact.

Quelques valeurs de f:

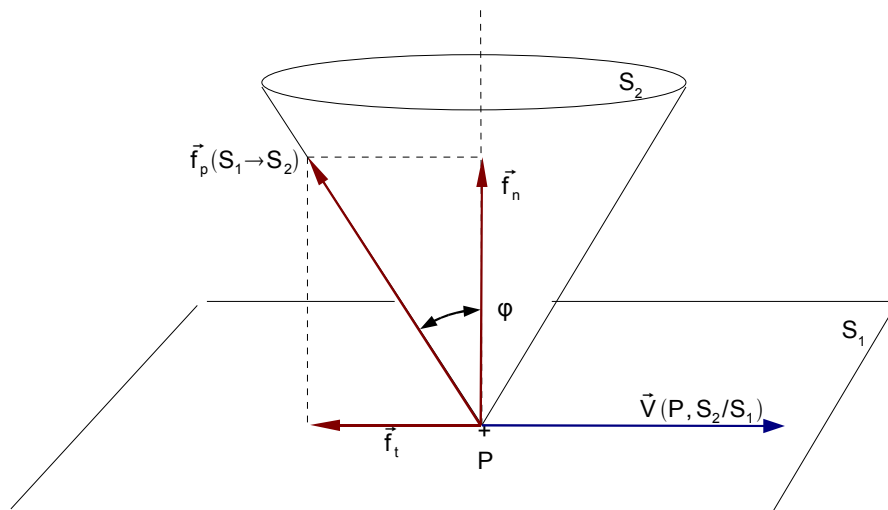
- Acier / acier: $f \approx 0,1$
- Acier / aluminium: $f \approx 0,3$
- Plaquette de frein / acier: $f \approx 0,4$
- Pneu / route sèche: $f \approx 0,6$



Il s'agit bien entendu d'un modèle du phénomène réel. En pratique, ces valeurs varient très amplement en fonction de l'état des surfaces en contact (rugosité, propreté, oxydation) et surtout de leur éventuelle lubrification.

Interprétation géométrique du glissement :

Si on introduit $f = \tan \varphi$, \vec{f}_p se trouve sur la surface du **cône de frottement** de demi-angle au sommet φ .



b/ Si NON-glissement (=adhérence) entre (S₁) et (S₂) $\Leftrightarrow \vec{V}(P, S_2/S_1) = \vec{0}$

Si non, glissement, alors:

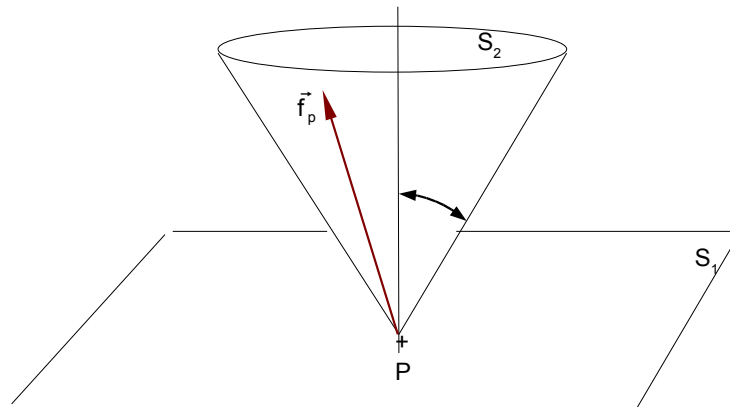
$$\|\vec{f}_t(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq f \cdot \|\vec{f}_n(S_1 \rightarrow S_2)\|$$

\vec{f}_t est dans un sens opposé au glissement de S₂/S₁ s'il avait lieu

On appelle **f' (=tan φ')** le **coefficient d'adhérence** d'un couple de matériau. f' est légèrement supérieur en valeur à f, mais en pratique, on fera l'approximation que **f=f'**.

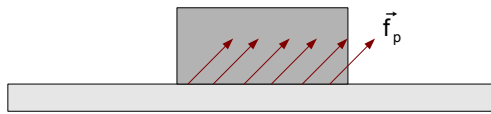
Interprétation géométrique de l'adhérence:

\vec{f}_p reste tout le temps à l'intérieur d'un cône de demi angle au sommet φ'



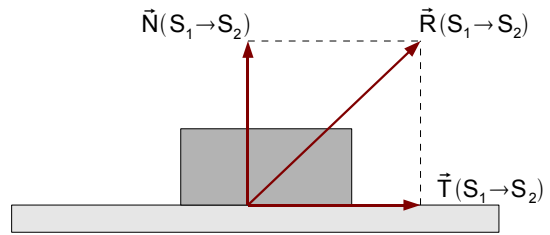
1-9-2/ Modélisation globale

Rappels des notations en local et en global



Modélisation locale

f_p est une densité surfacique de force



Modélisation globale

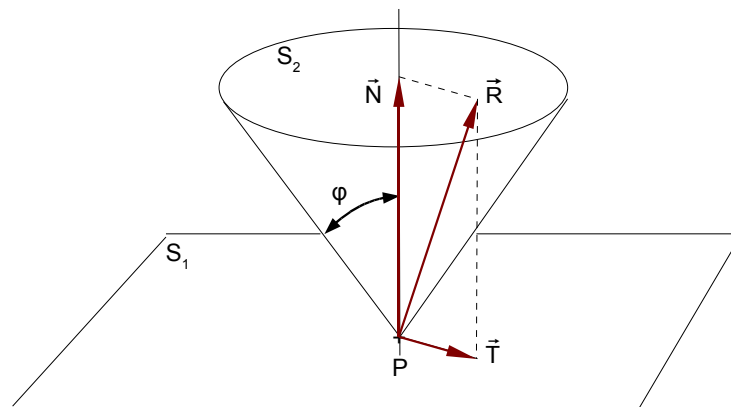
$R(S_1 \rightarrow S_2)$ est une force équivalente à la densité surfacique f_p sommée sur toute la surface de contact

$$\begin{aligned} \|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| &= \int_{(\text{surface de contact})} \|\vec{f}_t(S_1 \rightarrow S_2)\| dS \\ \text{or } \|\vec{f}_t(S_1 \rightarrow S_2)\| &\leq f \cdot \|\vec{f}_n(S_1 \rightarrow S_2)\| dS \\ \Rightarrow \|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| &\leq f \cdot \int_{(S)} \|\vec{f}_n(S_1 \rightarrow S_2)\| dS \\ \Rightarrow \|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| &\leq f \cdot \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\| \end{aligned}$$

Lois de Coulomb:

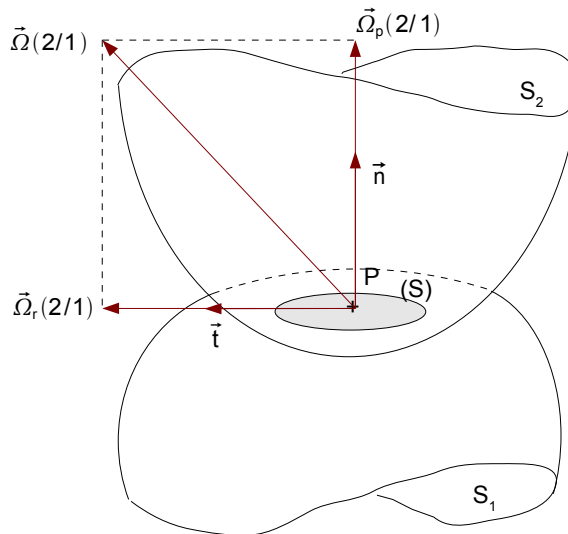
Si non glissement: $\|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq f \cdot \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\|$
 A la limite du glissement et pendant le glissement: $\|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| = f \cdot \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\|$
 $\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$ s'oppose à la vitesse éventuelle de glissement $\vec{V}(P, S_2/S_1)$

Interprétation géométrique: $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ reste dans un demi-cône de $\frac{1}{2}$ angle au sommet φ . La résultante est tangente au cône à la limite du glissement et pendant le glissement.



1-7/ Couple de résistance au pivotement et au roulement

Par analogie avec le frottement de glissement, on définit une résistance au pivotement et une résistance au roulement.



$\vec{\Omega}_p(2/1)$: composante de pivotement de 2/1
 $\vec{\Omega}_r(2/1)$: composante de roulement de 2/1

Et le torseur des actions mécaniques s'écrit:

$$\{T(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = N_{(1 \rightarrow 2)} \vec{n} + T_{(1 \rightarrow 2)} \vec{t} \\ \vec{M}(I, 1 \rightarrow 2) = M_{[p, 1 \rightarrow 2]} \vec{n} + M_{[r, 1 \rightarrow 2]} \vec{t} \end{array} \right\}$$

$M_{p,1 \rightarrow 2}$: couple de résistance au pivotement
 $M_{r,1 \rightarrow 2}$: couple de résistance au roulement

a/ Couple de résistance au roulement

Lois de Coulomb pour le roulement:

- S_2 ne roule pas sur S_1 ($\Omega_r(2/1)=0$)
 Alors $\|M_{[r, 1 \rightarrow 2]}\| \leq h \cdot \|N_{(1 \rightarrow 2)}\|$
- S_2 roule sur S_1 ($\Omega_r(2/1) \neq 0$)
 Alors $\|M_{[r, 1 \rightarrow 2]}\| = h \cdot \|N_{(1 \rightarrow 2)}\|$

h est le **coefficient de résistance au roulement (unité: m)**

b/ Couple de résistance au pivotement

Lois de Coulomb pour le pivotement:

- S_2 ne pivote pas sur S_1 ($\Omega_p(2/1)=0$)
 Alors $\|M_{[p, 1 \rightarrow 2]}\| \leq k \cdot \|N_{(1 \rightarrow 2)}\|$
- S_2 pivote sur S_1 ($\Omega_p(2/1) \neq 0$)
 Alors $\|M_{[p, 1 \rightarrow 2]}\| = k \cdot \|N_{(1 \rightarrow 2)}\|$

k est le **coefficient de résistance au pivotement (unité: m)**

2/ Principe fondamental de la statique

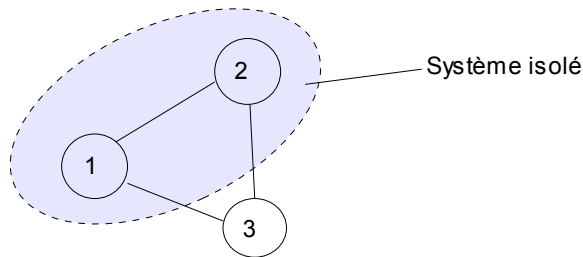
2-1/ Isolement d'un système matériel

2-1-1/ Définitions

Système isolé= tout ou partie d'un système matériel que l'on rend distinct de son environnement (*quantité de fluide, partie de pièce, une pièce ou un ensemble de pièces...*)

L'espace est donc séparé en 2 parties: le système isolé E et son environnement \bar{E} .

Graphe de liaisons:



2-1-2/ Efforts intérieurs et extérieurs

- efforts extérieurs appliqués à un système E = actions mécaniques exercées par \bar{E} sur E modélisées par un torseur.

- efforts intérieurs: actions exercées mutuellement par les différentes parties du système isolé.

2-1-3/ Problème plan

Un problème est plan si :

- Tous les glisseurs agissant sur le mécanisme appartiennent à un plan unique (ou sont répartis symétriquement par rapport à ce plan)
- ET tous les moments sont normaux à ce plan

Dans le cas d'un problème plan (x,y), le torseur statique devient :

$$T(\bar{E} \rightarrow E): \left\{ \begin{array}{l} F_x \\ F_y \\ - M_z \end{array} \right\}_A$$

Répondre aux questions 1, 2,3 et 4 de l'exercice de l'annexe

2-2/ Principe fondamental de la statique

2-2-1/ Equilibre d'un système matériel E par rapport à un repère R

On dit qu'un système E est en équilibre par rapport à un repère R si, à un instant donné, tous ses éléments sont immobiles par rapport à R .

$$E \text{ en équilibre}/R \Leftrightarrow \forall M \in E, \vec{V}(M, E/R) = \vec{0}$$

2-2-2/ Enoncé du principe fondamental de la statique

Pour qu'un système matériel E soit en équilibre (ou en translation rectiligne et uniforme) par rapport à un référentiel galiléen, il faut que le torseur des actions extérieures qui lui sont appliquées soit égal au torseur nul.

$$T(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0}$$

Repères galiléens approchés (cf cours de physique)

2-2-3/ Théorèmes généraux de la statique

- Théorème de la résultante statique: $E \text{ en équilibre}/R_g \Rightarrow \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0}$

- Théorème du moment statique: $E \text{ en équilibre}/R_g \Rightarrow \vec{M}(A, \bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \quad \forall A$

Conséquence: en projetant ces 2 équations vectorielles sur un repère orthonormé, on trouve :

Pour un problème spatial : 6 équations scalaires

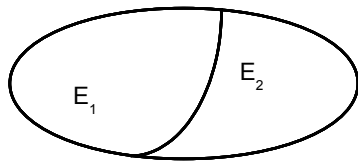
Pour un problème plan : 3 équations scalaires

En général, on évitera de poser le système à 6 (ou 3) équations. On choisira à l'avance la ou les équations qui nous permettront de résoudre le problème.

Répondre aux questions 5,6,7 de l'exercice de l'annexe

2-4/ Théorème des actions réciproques (ou mutuelles)

Soit $E = E_1 \cup E_2$ en équilibre dans R_g



$$T(\bar{E} \rightarrow E) = T(\bar{E} \rightarrow E_1) + T(\bar{E} \rightarrow E_2) = \{0\} \quad (1)$$

$$T(\bar{E}_1 \rightarrow E_1) = T(E_2 \rightarrow E_1) + T(\bar{E} \rightarrow E_1) = \{0\} \quad (2)$$

$$T(\bar{E}_2 \rightarrow E_2) = T(E_1 \rightarrow E_2) + T(\bar{E} \rightarrow E_2) = \{0\} \quad (3)$$

1. - (2) - (3) $T(E_2 \rightarrow E_1) + T(E_1 \rightarrow E_2) = \{0\}$
- 2.

Si un système matériel E_1 exerce une action mécanique sur un autre système E_2 , alors E_2 exerce sur E_1 une action opposée.

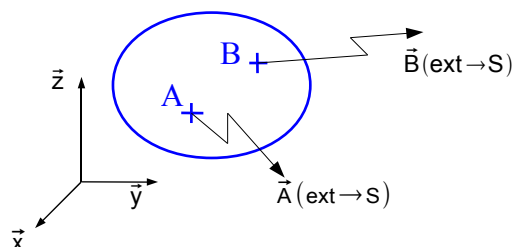
2-2-5/ Equilibre d'un solide (ou ensemble de solides) soumis à 2 actions modélisables par des glisseurs

Notation: $\vec{A}(\text{ext} \rightarrow S)$ = effort modélisable par un glisseur exercé en A par l'extérieur sur S

$$T_A(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad T_B(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

$$S \text{ en équilibre} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{(\text{ext} \rightarrow S)} + \vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)} = \vec{0} \quad (1) \\ \vec{AB} \wedge \vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)} \text{ colinéaires donc } \Delta \vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)} \text{ passe par } A \end{array} \right.$$

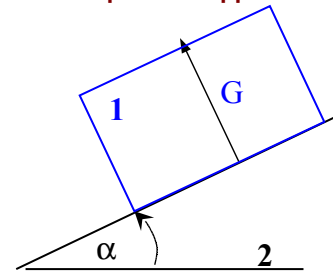
De (1) nous déduisons que $\vec{A}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ passe par B



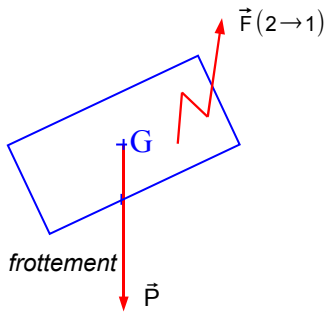
Théorème: si un solide (ou un ensemble de solides) est en équilibre, ou en translation rectiligne et uniforme, dans un référentiel galiléen, sous l'action de 2 efforts modélisables par des glisseurs, ceux-ci sont colinéaires et de somme nulle, et leur support est la droite passant par les deux points d'application.

Exemple: solide sur un plan incliné

On suppose l'action de 2 sur 1 modélisable par un glisseur.
Déterminer le coefficient de frottement minimal pour que 1 reste en équilibre.

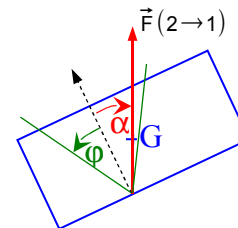


a – on isole le solide 1 et on fait le bilan des actions extérieures:



b – 1 est en équilibre sous l'action de deux glisseurs: ils sont donc directement opposés. $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ est vertical et passe par G

c - $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ est à l'intérieur du cône de



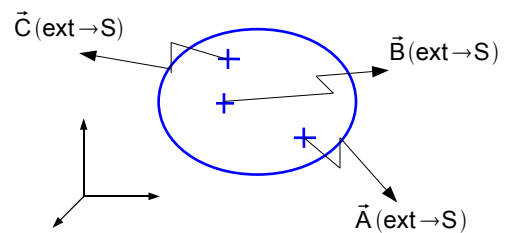
→ 1 reste en équilibre si $\alpha < \phi$

2-2-6/ Equilibre d'un solide (ou ensemble de solides) soumis à 3 actions modélisables par des glisseurs

$$T_A(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{matrix} \vec{A}_{(\text{ext} \rightarrow S)} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$$

$$T_B(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{matrix} \vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$$

$$T_C(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{matrix} \vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$$



S en équilibre, donc $\begin{cases} \vec{A}_{(\text{ext} \rightarrow S)} + \vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)} + \vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)} = \vec{0} & (1) \\ \vec{AB} \wedge \vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)} + \vec{AC} \wedge \vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)} = \vec{0} & (2) \end{cases}$

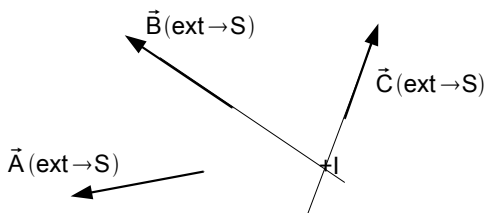
On pose $\vec{x} = \vec{AB} \wedge \vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ donc $\perp \vec{AB}$ et $\perp \vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ donc \perp au plan P_1 contenant A, B et $\vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$

On pose $\vec{y} = \vec{AC} \wedge \vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ donc $\perp \vec{AC}$ et $\perp \vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ donc \perp au plan P_2 contenant A, C et $\vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$

de (2), \vec{x} et \vec{y} sont colinéaires donc les plans P_1 et P_2 ont une normale commune et un point commun A
→ ils sont confondus donc $\vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ et $\vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ appartiennent au même plan $P_1 = P_2 = P$

de (1), $\vec{A}_{(\text{ext} \rightarrow S)} \in P \Rightarrow$ les 3 glisseurs $\vec{A}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$, $\vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$, $\vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ sont coplanaires.

* soit I l'intersection de $\vec{A}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ et $\vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ si elle existe



$$\Rightarrow \vec{M}(I, \vec{A}_{\text{ext} \rightarrow S}) = \vec{0} \text{ et } \vec{M}(I, \vec{B}_{\text{ext} \rightarrow S}) = \vec{0} \text{ par construction}$$

Exprimons le théorème du moment statique en I:

$$\vec{M}(I, \vec{A}_{\text{ext} \rightarrow S}) + \vec{M}(I, \vec{B}_{\text{ext} \rightarrow S}) + \vec{M}(I, \vec{C}_{\text{ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$$

d'où $\vec{M}(I, \vec{C}_{\text{ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$ donc $\vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ passe par I aussi

Les 3 glisseurs sont alors concourants en I.

Rq: si I n'existe pas, alors, $\vec{A}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$, $\vec{B}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$, $\vec{C}_{(\text{ext} \rightarrow S)}$ sont parallèles.

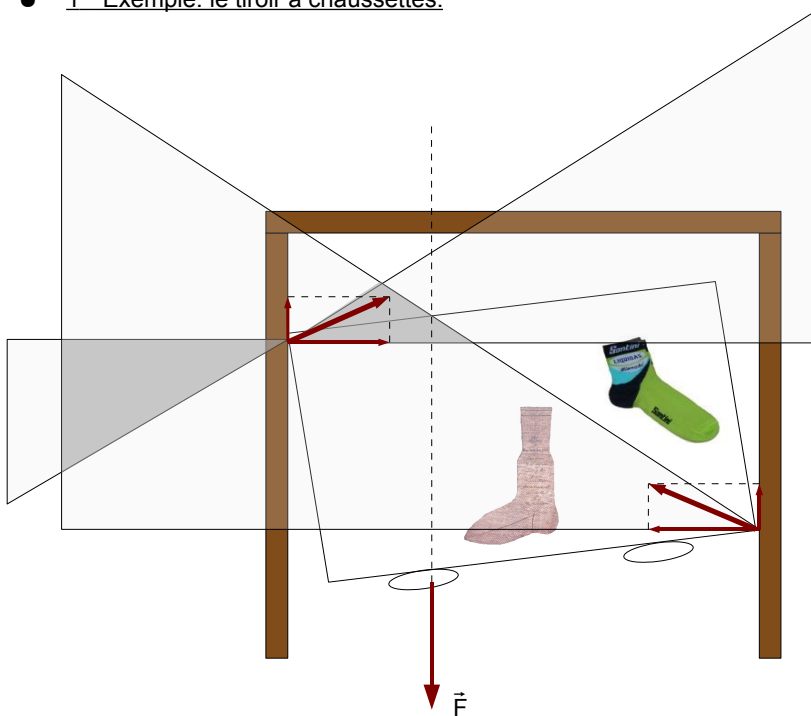
Théorème: Si un solide, soumis à trois actions modélisables par des glisseurs, est en équilibre ou en translation rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen, alors ces trois glisseurs sont:

- coplanaires
- concourants ou parallèles
- de somme vectorielle nulle.

2-3/ Phénomène d'arc-boutement

On dit qu'il y a arc-boutement d'un solide lorsque le phénomène d'adhérence provoque une impossibilité de mouvement quelle que soit l'intensité des actions mécaniques extérieures.

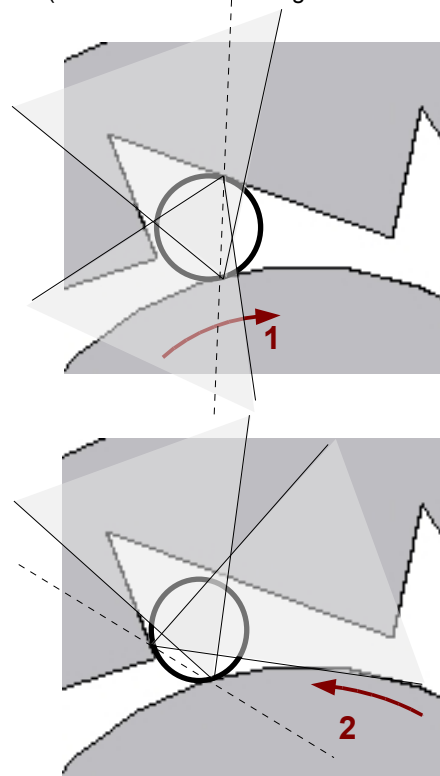
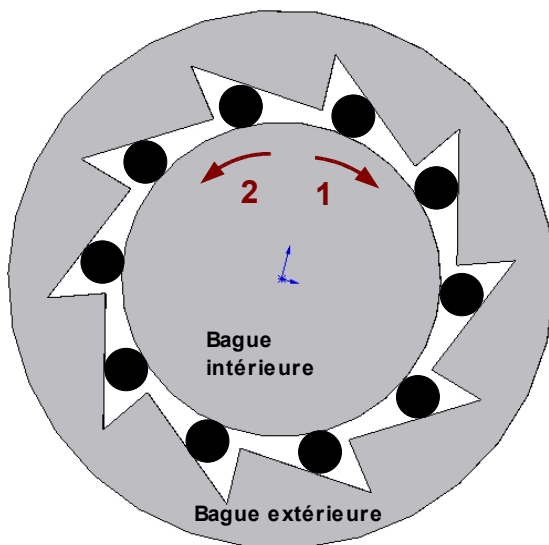
- 1^{er} Exemple: le tiroir à chaussettes:



Ci-dessus, le tiroir est soumis à 3 glisseurs. Ceux-ci sont nécessairement concourants dans une des zones grisées, représentant l'intersection des cônes de frottement. Or, un solide soumis à 3 glisseurs dont les supports sont concourants est en équilibre dans un repère galiléen....D'où l'arc-boutement.

- 2nd exemple: le système anti-dévireur (= roue libre) à galets

Rappel: la fonction de ce système est de ne transmettre la puissance entre la bague intérieure et la bague extérieure que pour un seul sens de rotation relative (en l'occurrence si la bague intérieure tourne dans le sens 2 par rapport à la bague extérieure).



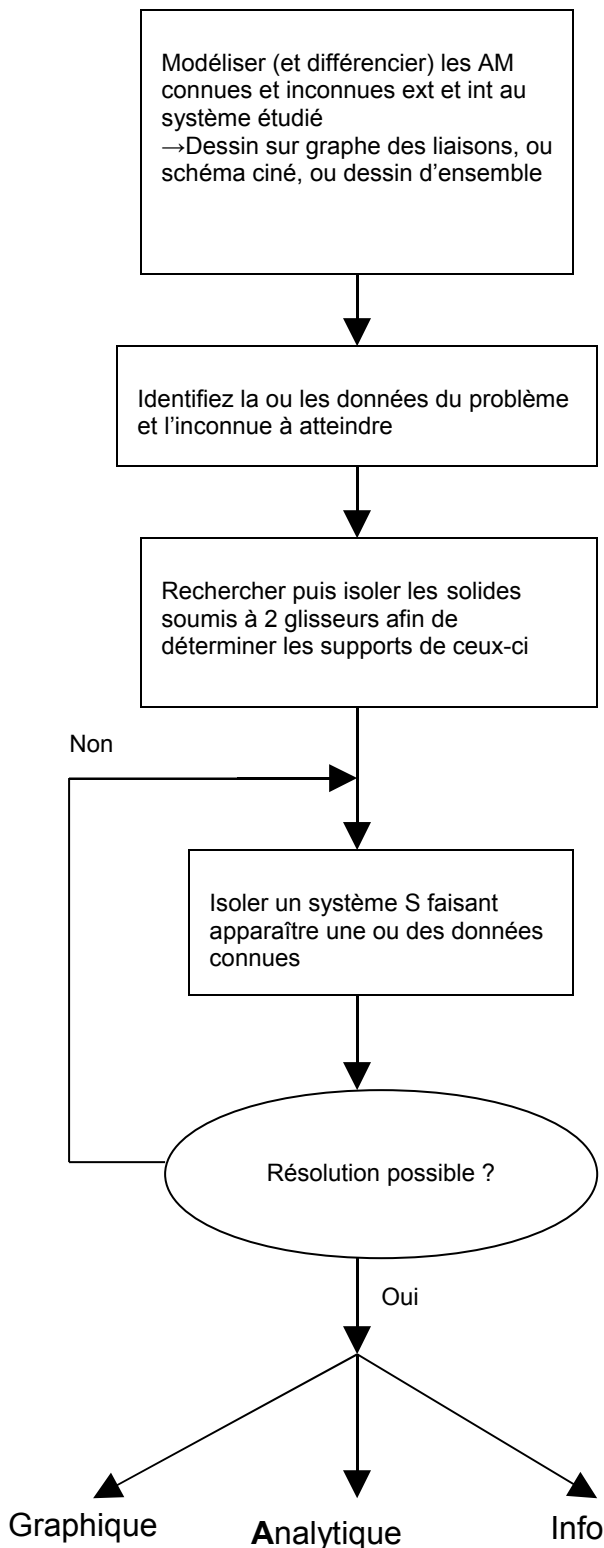
Chaque galet, si on néglige sa masse (hypothèse rapidement validée en lisant attentivement la définition du phénomène d'arc-boutement - «...quelle que soit l'intensité des actions mécaniques... » -), est soumis à deux glisseurs.

- Dans le cas 1, le support de ceux-ci est identique (en pointillé), et les glisseurs peuvent être égaux et opposés, il y a donc équilibre, et donc arc-boutement. Pratiquement, le galet se coince entre la bague intérieure et la bague extérieure. Le mouvement de rotation est donc transmis de la bague intérieure à la bague extérieure.
- Dans le cas 2, les glisseurs ne peuvent être opposés, il ne peut donc pas y avoir équilibre du galet, donc la bague intérieure ne peut entraîner la bague extérieure.

Méthode d'identification du phénomène d'arc-boutement:

- On trace en chaque point de contact les cônes de frottement (de chaque côté du point de contact)
- On repère la zone commune de l'intersection des cônes (coloriage éventuellement)
- On vérifie si l'équilibre est réalisable;
 - Pour un solide soumis à deux glisseurs: il y a arc-boutement si le support commun des glisseurs peut être contenu dans la zone d'intersection des cônes
 - Pour un solide soumis à trois glisseurs: il y a arc-boutement si le point d'intersection des supports peut être dans le cône.

3/ Méthodologie de résolution d'un problème de statique



Remarques :

→ Lire énoncé et hypothèses (données : poids, force d'un vérin, couple moteur, ...)

graphique et analytique:

→ Représentez toutes les composantes inconnues > 0 sur le dessin

Par exemple en coloriant sur le graphe des liaisons les données connues et les inconnues recherchées de 2 couleurs différentes

Graphique: Dessiner les supports Δ_{ij}

Analytique: identifier les vecteurs directeurs des glisseurs

Graphique et analytique:

→ Choisir S t.q. on se rapproche de l'inconnue recherchée (cf graphe de liaisons)

→ Privilégiez les systèmes soumis à 3 glisseurs

Vérifiez que le PFS fournit autant d'équations que d'inconnues (sinon c'est que vous êtes en 2^{ème} année, cf chapitre hyperstatisme)

→ Méthode souvent imposée



→ Si résolution analytique, éviter d'écrire le PFS complet avec les torseurs. Il faut **choisir** à l'avance **le théorème** (moment ou résultante) et l'axe de projection, **qui font intervenir une donnée connue, et un minimum de données inconnues, dont celle recherchée**